

Quadratische Gleichungen mit Formvariablen

Beispiele:

- 1 Bestimmen Sie die Anzahl und Lage der Lösungen der quadratischen Gleichung

$$x^2 - 3bx + 2b^2 = 0 \text{ mit } b \in \mathbb{R}.$$

$$x_{1/2} = \frac{3b \pm \sqrt{9b^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2b^2}}{2} = \frac{3b \pm \sqrt{9b^2 - 8b^2}}{2} = \frac{3b \pm \sqrt{b^2}}{2} = \frac{3b \pm b}{2}$$

$$x_1 = \frac{3b+b}{2} = 2b \quad x_2 = \frac{3b-b}{2} = b$$

$b=0$: die quadratische Gleichung hat eine Lösung bei $x=0$

$b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$: die quadratische Gleichung hat zwei Lösungen bei $x_1 = b$ und $x_2 = 2b$

- 2 Bestimmen Sie die Anzahl und Lage der Lösungen der quadratischen Gleichung

$$t^2 x^2 - 2tx = t^2 - 1 \text{ mit } t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

$$t^2 x^2 - 2tx - t^2 + 1 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{2t \pm \sqrt{4t^2 - 4 \cdot t^2 \cdot (-t^2 + 1)}}{2t^2} = \frac{2t \pm \sqrt{4t^2 + 4t^4 - 4t^2}}{2t^2} = \frac{2t \pm \sqrt{4t^4}}{2t^2} = \frac{2t \pm 2t^2}{2t^2}$$

$$x_1 = \frac{2t+2t^2}{2t^2} = \frac{1}{t} + 1 \quad x_2 = \frac{2t-2t^2}{2t^2} = \frac{1}{t} - 1$$

$t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$: die quadratische Gleichung hat zwei Lösungen bei $x_1 = \frac{1}{t} + 1$ und $x_2 = \frac{1}{t} - 1$

- 3 Bestimmen Sie die Anzahl und Lage der Lösungen der quadratischen Gleichung

$$x^2 - 6x + k = 0 \text{ mit } k \in \mathbb{R}.$$

$$x_{1/2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 1 \cdot k}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4k}}{2}$$

$36 - 4k = 0 \Rightarrow k = 9$: die quadratische Gleichung hat eine Lösung bei $x = 3$

$36 - 4k > 0 \Rightarrow k < 9$: die quadratische Gleichung hat zwei Lösungen bei

$$x_1 = \frac{6 + \sqrt{36 - 4k}}{2} \text{ und } x_2 = \frac{6 - \sqrt{36 - 4k}}{2}$$

$36 - 4k < 0 \Rightarrow k > 9$: die quadratische Gleichung hat keine Lösung

- 4 Bestimmen Sie die Anzahl und Lage der Lösungen der quadratischen Gleichung

$$x^2 + 16x + t - 1 = 0 \text{ mit } t \in \mathbb{R}.$$

$$x_{1/2} = \frac{-16 \pm \sqrt{256 - 4 \cdot 1 \cdot (t-1)}}{2} = \frac{-16 \pm \sqrt{260 - 4t}}{2}$$

$260 - 4t = 0 \Rightarrow t = 65$: die quadratische Gleichung hat eine Lösung bei $x = -8$

$260 - 4t > 0 \Rightarrow t < 65$: die quadratische Gleichung hat zwei Lösungen bei

$$x_1 = \frac{-16 + \sqrt{260 - 4t}}{2} \text{ und } x_2 = \frac{-16 - \sqrt{260 - 4t}}{2}$$

$260 - 4t < 0 \Rightarrow t > 65$: die quadratische Gleichung hat keine Lösung

- 5 Bestimmen Sie die Anzahl und Lage der Lösungen der quadratischen Gleichung

$$4x^2 - 4mx + m^2 = 0 \text{ mit } m \in \mathbb{R}.$$

$$x_{1/2} = \frac{4m \pm \sqrt{16m^2 - 4 \cdot 4 \cdot m^2}}{8} = \frac{4m \pm \sqrt{16m^2 - 16m^2}}{8} = \frac{1}{2}m$$

Die quadratische Gleichung hat für alle $m \in \mathbb{R}$ eine Lösung bei $x = \frac{1}{2}m$

- 6 Bestimmen Sie die Anzahl und Lage der Lösungen der quadratischen Gleichung

$$ax^2 + (a+2)x + 2 = 0 \text{ mit } a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

$$x_{1/2} = \frac{-(a+2) \pm \sqrt{a^2 + 4a + 4 - 4 \cdot a \cdot 2}}{2a} = \frac{-(a+2) \pm \sqrt{a^2 - 4a + 4}}{2a} =$$

$$= \frac{-(a+2) \pm \sqrt{(a-2)^2}}{2a} = \frac{-(a+2) \pm (a-2)}{2a}$$

$$x_1 = \frac{-a-2+a-2}{2a} = -\frac{2}{a} \quad x_2 = \frac{-a-2-a+2}{2a} = -1$$

$a = 2$: die quadratische Gleichung hat eine Lösung bei $x = -1$

$a \in \mathbb{R} \setminus \{0; 2\}$: die quadratische Gleichung hat zwei Lösungen bei

$$x_1 = -\frac{2}{a} \text{ und } x_2 = -1$$

7 Bestimmen Sie die Anzahl und Lage der Lösungen der quadratischen Gleichung

$(a+1)x^2 + ax - 1 = 0$ mit $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

$$\begin{aligned} x_{1/2} &= \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4 \cdot (a+1) \cdot (-1)}}{2(a+1)} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 4a + 4}}{2(a+1)} = \frac{-a \pm \sqrt{(a+2)^2}}{2(a+1)} = \\ &= \frac{-a \pm (a+2)}{2(a+1)} \end{aligned}$$

$$x_1 = \frac{-a + a + 2}{2(a+1)} = \frac{1}{a+1} \quad x_2 = \frac{-a - a - 2}{2(a+1)} = -1$$

$a = -2$: die quadratische Gleichung hat eine Lösung bei $x = -1$

$a \in \mathbb{R} \setminus \{-2; -1\}$: die quadratische Gleichung hat zwei Lösungen bei

$$x_1 = \frac{1}{a+1} \text{ und } x_2 = -1$$